

## 有限要素法モデルにベイズ更新を適用した板材の損傷推定手法の検証

正会員 ○倉田真宏\*1 会員外 Jerome P. Lynch\*2 会員外 Kincho H. Law\*3

### 2. 構造—2. 振動

板材, 損傷検知, モデル更新, ベイズ推定, 分枝限定法

#### 1. はじめに

近年, MEMS 技術の発展に伴うセンサ単価の低下により, 集密なセンサアレイを利用して構造物の損傷度を推定し, 構造物の点検にかかる時間とコストを低減する健全性判定システムの開発機運が高まっている. しかしながら, 損傷が疑われる箇所の数に対して設置できるセンサ数は限られ, センサから得られる情報を十分とは言えない. そこでセンサ情報を補完する損傷検知手法として, 例えば, Sohn 等<sup>1)</sup>はベイズ推定とヒューリスティック損傷探索法のひとつである分枝限定法を用いて建物の骨組解析モデルのパラメタを更新し, 損傷が疑われる箇所の順位付けを行っている.

一方で, 板材のような平面内の微小な亀裂の位置を同定するためには, 細かい要素に区切られた有限要素法モデル (FE モデル) が必要となる. この場合, 損傷が疑われる要素の数に対してセンサの数が圧倒的に少ないため, 情報量がより一層限定される. 本論では, 限定された情報量下で亀裂の位置を推定するために, 適切な目的関数を実装したモデル更新法を提示し, 分枝限定法を用いて板材内で損傷が疑われる領域を確率的に推定した. また, スチフナ付き板材の数値解析と振動実験を通して提案する手法の精度を検証した.

#### 2. 理論背景

##### 2.1. ベイズ更新を適用した板材の確率的損傷推定

$N$ 個の要素を持った板材の FE モデルを考える. 板材の亀裂近傍では不連続部の存在により剛性が低下するが, FE モデル上では不連続部を再現することが非常に煩雑となるため, 有限要素の弾性係数に剛性低減係数  $k$  を与えることで亀裂を近似的に表現する. FE モデルの弾性係数  $E$  は各要素の弾性係数  $E_i$  を用いて次のように表せる.

$$E = \{E_1, E_2, \dots, E_i, E_{i+1}, \dots, E_{i+n}, E_{N-1}, E_N\} \quad (1)$$

仮に板材の亀裂近傍を  $n$  個の有限要素でモデル化すると, 損傷入り要素の弾性係数  $\{E_{i+1}, \dots, E_{i+j}, \dots, E_{i+n}\}$  は以下のように書き換えられる.

$$E_d = \{k_{i+1}E_{i+1}, \dots, k_{i+j}E_{i+j}, \dots, k_{i+n}E_{i+n}\} \quad (2)$$

$k_{i+j} (< 1)$ ,  $j = 1, \dots, n$  は  $(i+j)$  番目の損傷入り要素に対する剛性低減係数を表す. 正解となる損傷要素の組み合わせを求めることで, 板材に入った亀裂の位置が同定できる. 実際には, センサからの情報が限定されていることや, 計測ノイズとモデル構築の近似に伴うエラーの存在により, 損傷入り要素の組み合わせを一意に同定することが難しい. そこで, 以下に示すようにベイズの定理を繰り返し適用し, 実測値との誤差がより小さい損傷要素の組み合わせを確率的に求める (この操作をベイズ更新と呼ぶ).

FE モデルに反映する損傷の仮説を  $M$  とする. FE モデルと実測値の応答の誤差を  $M$  の関数と考え, 推定される損傷の事前確立分布  $p(M)$  とする. より客観性の高い損傷の事後確率分布  $p(M|s)$  をベイズの定理を用いて次のように求められる.

$$p(M|s) = \frac{p(s|M)p(M)}{p(s)} \propto p(s|M)p(M) \quad (3)$$

$p(s|M)$  は尤度関数,  $s$  は計測または推定される応答を表す.  $p(s)$  は応答の確率で, 単に正規化のための定数として扱う. 計測される応答との誤差を求めてベイズ更新を繰り返すことで, 高確率で損傷が疑われる領域のみを抽出することができる.

##### 2.2. 柔性目的関数

ベイズ更新を用いて実損傷状態に漸近した損傷モデルを探索するためには, 先述の損傷入り要素の組み合わせ最適化問題に対して, 構造型状の変化に高感度な目的関数を与えなければならない. 構造型状をあらわす指標は振動パラメタ (固有振動数, モー

形状など) や物理パラメタ (質量マトリクスや剛性マトリクスなど) に代表され, これらは観測データ (例えば加速度応答データ) に適切なシステム同定法を適用することで推定できる. 板材の有限要素法モデルは要素数が非常に多く観測データから剛性マトリクス自身を推定することは難しいため, ここでは比較的簡便に推定可能な振動パラメタを利用して高感度の目的関数を構築する.

振動性状の変化に着目した過去の研究では様々な指標 (例えば, モード形状, モード形状局率やモードひずみエネルギー) が提案されているが, ここでは固有振動数とモード形状から計算される柔性パラメタ<sup>2)</sup>を利用して目的関数を構築する.

質量行列により正規化されたモード形状  $\bar{\phi} = [\bar{\phi}_1 \bar{\phi}_2 \dots \bar{\phi}_N]$  と固有周期を用いて柔性行列は次のように表せる.

$$F = \bar{\phi} \Omega^{-1} \bar{\phi}^T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_i^2} \bar{\phi}_i \bar{\phi}_i^T \quad (4)$$

$\Omega = \text{diag}(\omega_i^2)$  はスペクトル行列,  $\omega_i$  は固有周期を示す. 構造物の応答から得られるモード形状は通常各モードでの最大変位により正規化されている. 一方, 汎用の有限要素法解析ツールでは変位正規モード形状と質量正規モード形状の両方を出力できる. 解析上での各モードでの両者の比  $d_i$  を算出して, 応答から得られる変位正規モード形状にかけることで構造物の質量正規モード形状を推定できる.

構造物の時刻歴応答から同定される振動パラメタは高次モードになるほど精度が落ちるが, 柔性パラメタを利用した目的関数の感度は固有振動数の 2 乗に反比例するため, 高次モードでのノイズの影響を抑えることができる. また, 振動試験で得られるモード情報は数次程度であるため, 応答から得られる柔性行列は以下に示すように近似される.

$$F_{trun} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{d_i}{\omega_i}\right)^2 \phi_i \phi_i^T \quad (5)$$

ここで,  $\phi_i$  は変位により正規化されたモードパラメタ,  $m$  は同定可能な最高モードの次数を示す.

実測値の応答から求められる近似柔性行列  $F_{trun}^{true}$  と現在の FE モデルの近似柔性行列  $F_{trun}^{trial}$  の差  $\Delta F_{trun}$  がベイズ更新に用いる誤差の指標 (目的関数) となる.

$$\Delta F_{trun} = F_{trun}^{true} - F_{trun}^{trial} \quad (6)$$

$\Delta F_{trun}$  が零に近づけば, FE モデルと構造物の損傷状態は漸近するが, 計測ノイズやモデル化における近似により零となることはない.

ベイズ更新に用いる目的関数はスカラー量の方が扱いやすいので, 次式に示すように, 行列ノルムが行列のユニタリ変換において不変であることを利用して, 柔性行列の差のノルム  $\|\Delta F_{trun}\|_F$  を特異値の 2 乗平均として求める.

$$\begin{aligned} \|\Delta F_{trun}\|_F &= \|USV^T\|_F \\ &= \|S\|_F = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_R^2} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで,  $U$  と  $V^T$  は特異値ベクトル,  $S$  は特異値  $s_i$  を成分にもつ対角行列,  $R$  は柔性行列のランク (使用するモードの数) である.

### 2.3. 分枝限定法

複雑な有限要素法モデルにおいて, 全ての損傷要素の組み合わせの探索を試みると爆発的に計算時間が増加する. 本論では, 分枝限定法をベイズ更新に組み込み損傷が疑われる領域をヒューリスティックに探索して, 近似的に損傷の状態を推定する.

図 1 に分枝限定法を利用した FE モデルの更新例を示す. 分枝限定法は現ステップの損傷要素の候補集合から“枝分かれ”を行い, 次ステップの損傷要素の候補集合を作成する. 得られた候補集合に対して先述の目的関数を求め, 誤差の大きい候補を“枝刈り”し, 残りを確率の高い候補として保持する.

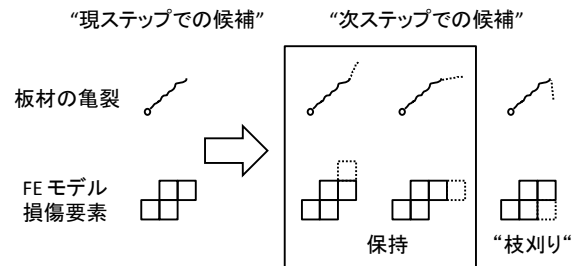


図 1 分枝限定法を用いた FE 損傷要素の更新

### 3. スチフナ付き板材の損傷検知

非対称位置にスチフナを配置したアルミニウム板をテストベットとして, 提案した損傷推定手法の性能を検証する. テストベットは 6.3mm 厚のアルミニウム板で構成されており, 610 x 1220mm サイズのベース板に 31 x 457mm のスチフナを溶接している (図

2). 両短辺は固定されており、ベース板の面外方向の振動特性を用いて目的関数を構築する。板材のFEモデルは汎用有限要素法プログラム ABAQUS<sup>4)</sup>を用いて構築する。ベース板とスチフナには4角形1次の低減積分要素 (S4R) を使用し、メッシュサイズを25 x 25mmとする。有限要素の比重は2.70 g/cm<sup>3</sup>、弾性係数を71GPa、損傷低減係数は10<sup>-6</sup>とする。

通常、亀裂は応力が集中する領域から発生するため、ここではスチフナの周囲を亀裂の発生が疑われる初期領域と想定し、図3に示す初期要素1~42から亀裂の探索を開始した。また、スチフナの周囲に設置した6個の加速度計を用いて振動性状を求めた。

### 3.1 数値解析による検証

まず、図4(a)に示す比較的大きい亀裂1の位置を同定した。初期要素に損傷を組み込んだ42個の“試行モデル”と、亀裂1の位置に損傷を組み込んだ“正解モデル”に対してモード解析を行い2.2節で設定した目的関数を求める。目的関数の値に基づき昇順し、“枝刈り”を行って確率の高い50%の“試行モデル”を保持する。図4(c)に“枝分かれ”による損傷マップの遷移を示す。損傷マップはヒストグラムに類似しており、各“枝分かれ”終了時にそれまでに保持された“試行モデル”の上位50%を選び、損傷要素として含まれた回数に基づき描かれている。探索開始時はスチフナ近傍の要素で損傷が疑われているが、“枝分かれ”が進行するとともに、徐々に正解の亀裂1の位置に損傷が疑われる領域が移動していく。“枝分かれ”を8回繰り返したところで損傷マップの変化が収束したため、探索を終了した。図4(b)に損傷要素のベイズ確率（他の損傷要素に対する確からしさ）を高さとした3次元の損傷マップを示す。亀裂1近傍で最も強く損傷が疑われており、提案する手法は精度よく亀裂位置を検知した。

同様に、亀裂の大きさや位置を変えてアルゴリズムを適用した（図5）。スチフナから中央部に小さな対角亀裂2および、板の長辺方向に平行な亀裂3に対しても提案する手法は有効であった。次に、ベース板に溶接するスチフナを2枚に増やし、探索領域をスチフナ近傍および板端に広げて損傷推定手法を適用した（図6）。この場合も、非常に良い精度で亀

裂位置を同定できた。ただし、亀裂2の同定では他方のスチフナ近傍の領域も亀裂の発生が疑われた。

### 3.2 振動実験による検証

前節で数値解析による検証に用いたテストベット（図2）の実大試験体を製作し、所定のセンサ位置（図3）にMEMS加速度計（Crossbow CXL02LF1Z）を設置して振動試験を行った（図7）。無損傷の試験体と亀裂1~3を入れた試験体の計4体を用意した。

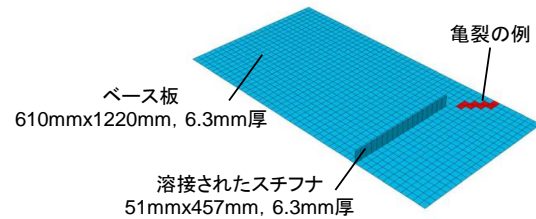


図2 テストベット

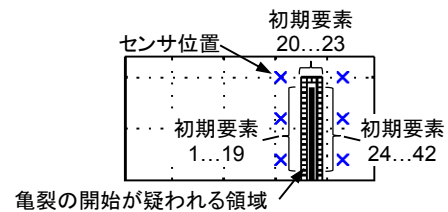


図3 センサの配置と探索開始領域

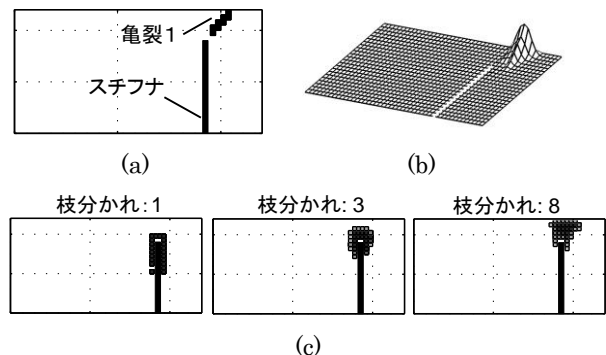


図4 亀裂位置の同定結果：(a)亀裂1；(b)ヒストグラムに類似した損傷マップ；(c)“枝分かれ”に伴う損傷マップの遷移

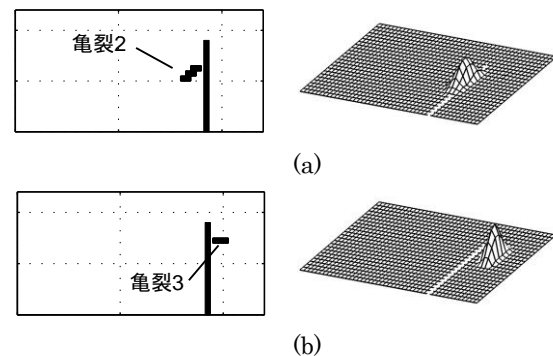


図5 位置や大きさの異なる亀裂位置の同定結果：(a)板中央部に対角に入った亀裂2；(b)板長辺方向に平行な亀裂3

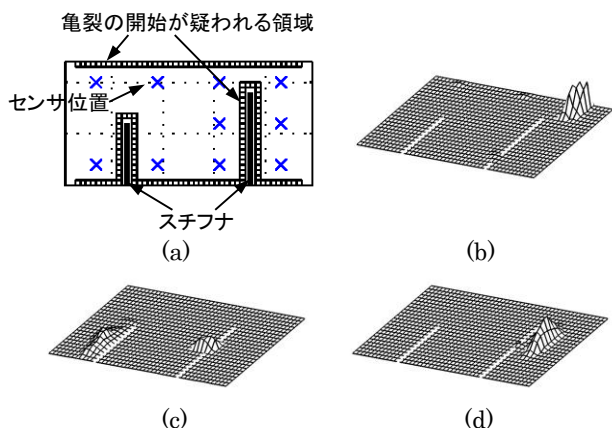


図6 スチフナが2枚ある場合:(a) センサの配置と探索開始領域;(b)亀裂1;(c)亀裂2;(d)亀裂3

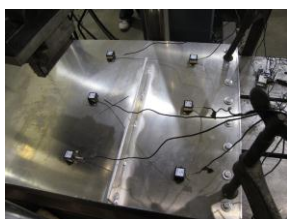


図7 テストベットの振動試験の様子

表1 亀裂1が入った試験体のモードパラメータ

Mode	Impact hammer test			Hand-tapping test		
	Modal frequency		Mode shape MAC	Modal frequency		Mode shape MAC
	Test (Hz)	FEM (Hz)		Test (Hz)	FEM (Hz)	
1	24.22	25.17	0.998	24.22	25.17	0.999
2	35.89	37.89	0.983	35.94	37.89	0.996
3	65.43	67.36	0.992	65.43	67.36	0.985
4	85.57	85.14	0.982	85.64	85.14	0.976
5	122.07	120.43	0.932	121.97	120.43	0.935

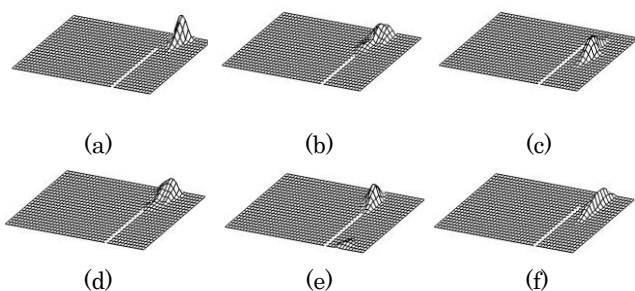


図8 振動試験結果に基づく亀裂位置の同定結果:(a)IM試験, 亀裂1;(b)IM試験, 亀裂2;(c)IM試験, 亀裂3;(d)RD試験, 亀裂1;(e)RD試験, 亀裂2;(f)RD試験, 亀裂3

ベース板の中央部付近をモーダルハンマーで叩いたインパクト载荷試験 (IH 試験) とハンドタッピングによるランダム载荷試験 (RD 試験) を行い, 応答

加速度に FDD 法 (Frequency Domain Decomposition) を適用してモードパラメータを同定した. 表1において, 亀裂1を入れた試験体の同定結果と有限要素法“正解モデル”のモード解析結果を比較する. 固有振動数の差異は最大で5%程度であり, モード形状も MAC 値 (Modal Assurance Criteria) も93%以上の高い相関を示した. インパクト载荷試験とハンドタッピング载荷試験との比較では, 同定された結果に大きな差異はなかった.

図8に亀裂位置の同定結果を示す. 提案した手法は亀裂1と亀裂3の近傍を同定することに成功した. 亀裂2はいずれの試験結果でも, 亀裂位置の同定に失敗した. その理由として, スチフナの溶接時に試験体に生じた初期不正が考えられる. また, IM 試験結果を用いた方が RD 試験結果を用いた場合よりも亀裂の近傍を精度よく同定できた.

#### 4. まとめ

有限要素法モデルを用いてセンサ情報を補完し, ベイズ更新による損傷要素分布の推定から板材に発生した亀裂の位置を同定した. 得られた知見を以下に示す.

1. 数値解析による検証では, スチフナ付き板材に発生した位置や大きさが異なる亀裂を精度よく同定できた. スチフナを増やし, 探索領域を広げた場合でも提案する手法は有効であった.
2. 提案する手法を振動試験結果に適用したときも, 精度よく亀裂の位置を推定できたが, 試験体の初期不正の影響でFEモデルとの誤差が大きい場合には, 損傷検知の精度は著しく落ちた.

#### 謝辞

本課題は米国 Office of Naval Research の助成 (N00014-10-1-0613, -0384) を受けて実施された.

#### 参考文献

- 1) Sohn, H., and Law, K.H., A Bayesian Probabilistic Approach for Structure Damage Detection, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 26, pp. 1259-1281, 2002.
- 2) Kurata, M., Lynch, J.P., Law, K.H., and Salvino, L.W., “Chapter 8: Bayesian Model Updating Approach for Systematic Damage Detection of Plate-Type Structures,” Proceedings of the 30th Imac, Springer, 4, 2012.
- 3) Dassault Systemes, “ABAQUS 6.10 Analysis User's Manual,” 2010.

\*1 京都大学防災研究所 助教・Ph.D.  
\*2 ミシガン大学土木環境工学科 准教授・Ph.D.  
\*3 スタンフォード大学土木環境工学科 教授・Ph.D.

Assistant Prof, DPRI, Kyoto Univ., Ph.D.  
Associate Prof, Dept. of CEE, Univ. of Michigan, Ph.D.  
Prof, Dept. of CEE, Stanford Univ., Ph.D.